

5.- LAS CORRIENTES DE CONVECCIÓN EN LAS CUBAS DE LOS HORNOS

5.1.- DISTRIBUCIÓN DE LAS PRESIONES “VITROESTÁTICAS” EN UN HORNO DE Balsa

El coeficiente de dilatación cúbica de los vidrios industriales depende de su composición química, como ya sabemos. A temperaturas por debajo de los 100°C suele tomar valores cercanos a $2,6 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ (ver el Capítulo I). Si dicho coeficiente pudiera extrapolarse a temperaturas superiores, resultaría que 1 cm^3 de vidrio a 0°C ocuparía un volumen a 1.500°C de $1,039 \text{ cm}^3$. En la práctica se comprueba que dicho volumen es claramente superior, alrededor de $1,112 \text{ cm}^3$. En otras palabras, a temperaturas del orden de las que se obtienen en las cubas de los hornos, el coeficiente de dilatación cúbica de los vidrios industriales oscila alrededor de $7,4 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$.

La variación de peso específico con la temperatura puede representarse mediante una expresión del tipo:

$$(5.1.1) \quad r(T) = \frac{r(T_0)}{1 + b \cdot (T - T_0)}$$

si suponemos que dentro de un intervalo de temperaturas entre 1.200°C y 1.500°C, el valor de b se mantiene constante, siendo b el coeficiente de dilatación cúbica.

Tomando para b el valor $7,392 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ y para $r(0^\circ\text{C})$ el de $2,49 \text{ g/cm}^3$ extraídos del ejemplo citado en el Capítulo I, resulta que la función $r(T)$ toma la forma siguiente:

$$r(T) = \frac{2,49}{1 + 73,9 \cdot 10^6 \cdot T}$$

que representada gráficamente, da lugar a la curva de la Figura 5.1, es decir, prácticamente una recta de ecuación: $r(T) = 2,49 - 1,66 \cdot 10^4 \cdot T$

Por otra parte, la experiencia de un conjunto extenso de medidas realizadas en hornos industriales muestran que, en las cubas calentadas por la parte superior, las temperaturas varían con la profundidad según una distribución prácticamente lineal; lo que no debe sorprendernos si analizamos con detenimiento la variación de la conductividad aparente del vidrio con la temperatura absoluta. Por esta razón, se puede decir que:

$$(5.1.2) \quad T(y) = T(0) - q \cdot y$$

VARIACIÓN DE LA DENSIDAD DE UN VIDRIO CON LA TEMPERATURA

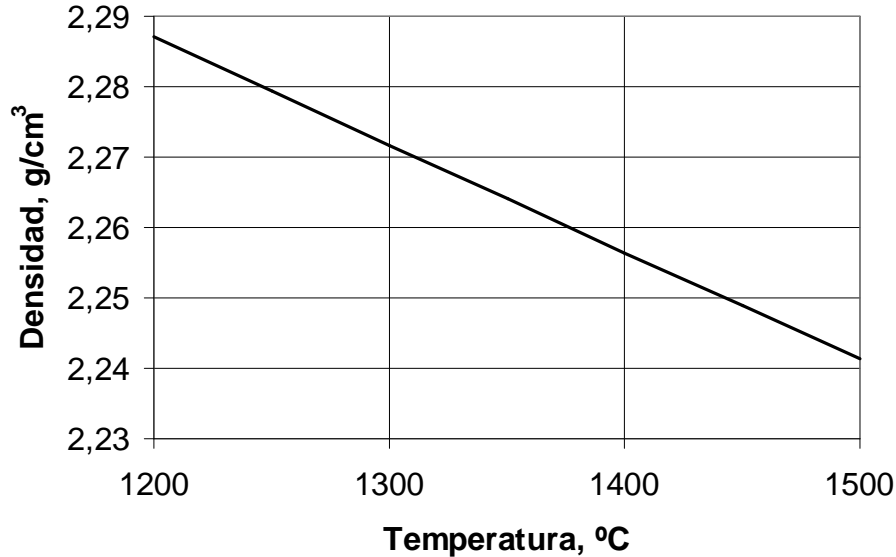


Figura 5.1.1

Combinando esta ecuación con la (5.1.1), resulta:

$$(5.1.3) \quad r(T) = \frac{r(T_0)}{1 + b[T(0) - q \cdot y - T_0]}$$

Supongamos que en la cuba de un horno dado, se cumple que:

$$T(0) = 1.500^{\circ}\text{C}$$

$$b = 7,392 \cdot 10^{-5} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$$

$$T_0 = 0^{\circ}\text{C}$$

$$h = 140 \text{ cm}$$

$$r(T_0) = 2,49 \text{ g/cm}^3$$

$$q = \frac{1.500 - 1.300}{140} = 1,4286^{\circ}\text{C/cm}$$

la variación de la presión vitrostática con la profundidad, será: $dp(y) = r \cdot g \cdot dy$

$$(5.1.4) \quad p(Y) = \int_0^Y \frac{r(T_0) \cdot g}{1 + b \cdot [T(0) - q \cdot y - T_0]} \cdot dy.$$

que al integrar queda así:

$$p(Y) = \frac{r(T_0) \cdot g}{b \cdot q} \ln \left(\frac{1 + b \cdot [T(0) - T_0]}{1 + b \cdot [T(0) - T_0 - q \cdot Y]} \right)$$

y sustituyendo valores numéricos:

$$p(Y) = \frac{2,49 \times 980}{7,392 \cdot 10^{-5} \times 1,4286} \ln \left(\frac{1 + 7,396 \cdot 10^{-5} \times 1.500}{1 + 7,392 \cdot 10^{-5} (1.500 - 1,4286 \cdot Y)} \right)$$

En el gráfico 5.1.2 se dibuja esta función.

PRESIÓN EN LA CUBA DE VIDRIO

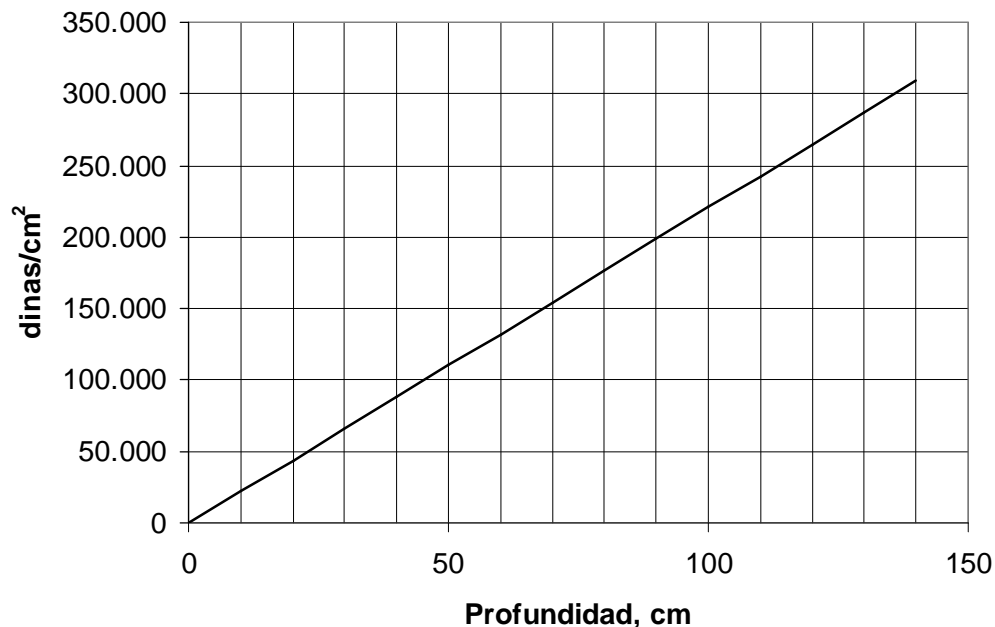


Figura 5.1.2

A la vista ella podemos concluir dos cosas:

- 1ª) La curva $p(Y)$ es prácticamente una recta.
- 2ª) El valor máximo de la presión, (fondo de la cuba), vale $309.591,80 \text{ dinas/cm}^2$.

Supongamos que, para simplificar, decimos que esa presión debe expresarse cómo $p(140) = \bar{r} \cdot g \cdot 140$. Busquemos el valor medio de \bar{r} :

$$(5.1.5) \bar{r} = \frac{309.591,80}{980 \cdot 140} = 2,2565 \text{ g/cm}^2$$

que, aplicando la ecuación (5.1.1) daría $T = 1.399,8^\circ\text{C}$, que es casi exactamente la temperatura media en la cuba del ejemplo.

Este resultado es una consecuencia directa de la forma rectilínea de la función $p(T)$ ya comentada. En efecto, si sustituimos la ecuación (5.1.1) por otra del estilo $r(T) = r_0 - a \cdot T$ en la ecuación (5.1.3), daría cómo resultado:

$$r(T) = r_0 - a \cdot [T(0) - q \cdot y]$$

que sustituyendo en (5.1.4), nos daría:

$$\int_0^y g \left(r_0 - a \cdot [T(0) - q \cdot y] \right) \cdot dy = g \left(r_0 \cdot y - a \cdot y \cdot \left(T(0) - \frac{q \cdot y}{2} \right) \right)$$

La presión en el fondo de la cuba sería, en este caso:

$$p(h) = g \left(r_0 \cdot h - a \cdot h \cdot \left(T(0) - \frac{q \cdot h}{2} \right) \right)$$

que razonando cómo hacíamos en (5.1.5) daría lugar a:

$$\bar{r} \cdot g \cdot h = g \left(r_0 \cdot h - a \cdot h \cdot \left(T(0) - \frac{q \cdot h}{2} \right) \right)$$

esta *densidad media* puede venir representada por su *temperatura media* correspondiente, de acuerdo con su definición anterior:

$$\bar{r} = r_0 - a \cdot \left(T(0) - \frac{q \cdot h}{2} \right) = r_0 - a \cdot T_m$$

simplificando esta igualdad: $T(0) - \frac{q \cdot h}{2} = T_m$, que se corresponde exactamente con la temperatura a la mitad de la altura de la cuba, es decir, la temperatura media entre la superficial y la del fondo. Así pues, podemos afirmar, sin temor a cometer graves errores, que la presión vitrostática en las cubas de los hornos industriales de elaboración de vidrio, varía linealmente con la profundidad. Por tanto, puede representarse por una función del tipo:

$$p(y) = \bar{r} \cdot g \cdot y$$

5.2.- EL MOVIMIENTO LAMINAR

En el apartado anterior hemos considerado un ejemplo, cercano a la realidad, y en el que hablamos de temperaturas entre los 1.200°C y los 1.550°C. como valores extremos. Si observamos las curvas de viscosidad de los vidrios industriales, nos daremos cuenta que casi todos se sitúan alrededor de la que se da cómo ejemplo en la Figura 1.

En ella puede verse que la viscosidad oscila entre **1.000 poises** y **50 poises**. Aplicando los criterios de Reynolds, nos encontramos con que los movimientos del vidrio en la cuba siempre se sitúan dentro de la zona del movimiento llamado "laminar". Las ecuaciones diferenciales de *Euler*, para el caso de un potencial de las velocidades y otro de fuerzas, para movimientos permanentes (cuba de vidrio en régimen estable, no transitorio) se simplifican en la forma llamada de *Navier*. En el caso de movimientos laminares se pueden escribir así:

$$\frac{r}{g} X - \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{r}{g} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \right) - m \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

$$\frac{r}{g} Y - \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{r}{g} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial v}{\partial z} \right) - m \cdot \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)$$

$$\frac{r}{g} Z - \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{r}{g} \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial w}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial w}{\partial z} \right) - m \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)$$

X, Y, Z: Son las componentes de los vectores fuerzas exteriores

u, v, w: Son las componentes de los vectores velocidad

p Es la presión que actúa en cada elemento de volumen

r La densidad en cada punto

m La viscosidad

g La aceleración de la gravedad

t El escalar tiempo

5.3.- LAS CORRIENTES PRINCIPALES EN LAS CUBAS

5.3.1.- Presentación preliminar

En la figura 5.3.1.1 se esquematiza un alzado de una cuba de planta rectangular, llena de vidrio a una temperatura perfectamente uniforme T_1 . En la figura 5.3.1.1bis se traza la gráfica de presiones vitrostáticas en función de la altura (y). Cuando esta es $y = h_0$ (nivel de la solera), la presión es máxima y vale p_0 .

Supongamos ahora que dividimos la cuba en dos partes que separamos mediante un tabique (figura 5.3.1.2). En la parte de la derecha introducimos un sistema de calentamiento que permite mantener a todo el vidrio contenido en ella a una temperatura también uniforme T_2 , de tal manera que $T_2 > T_1$. Por efecto de la dilatación, el vidrio de la zona derecha aumentará de volumen, alcanzando un nivel ($h_0 + Dh$). En la figura 5.3.1.2bis se trazan las curvas de presión vitrostática en función de la altura para las dos zonas. En el fondo de la cuba, ambas presiones deben ser iguales. A la derecha del gráfico se dibuja la curva de diferencia de presiones que se ejercen sobre el tabique de separación, con la altura.

Manteniendo todas las condiciones perfectamente constantes, levantamos el tabique de separación de las dos zonas. Por efecto de la presión ya comentada, una parte del vidrio de la superficie de la zona derecha, irá a parar a la zona izquierda, la cual aumentará de nivel. Este trasiego de vidrio de una zona a la otra, hará bajar el nivel de la primera (la de la derecha), para aumentar el de la izquierda (ir a página 70). Su Dh se verá disminuido, si bien se mantendrá en un cierto valor. Las presiones en el fondo de una y otra parte ya no serán iguales, y las curvas de

presión en función de la altura serán las indicadas en la figura 5.3.1.4bis. La curva de la derecha indica la evolución con la altura de la presión diferencial en la zona de transición entre una zona y otra. Impulsado por estas presiones diferenciales, el vidrio pasará de la zona derecha a la izquierda en la parte superior, y en sentido

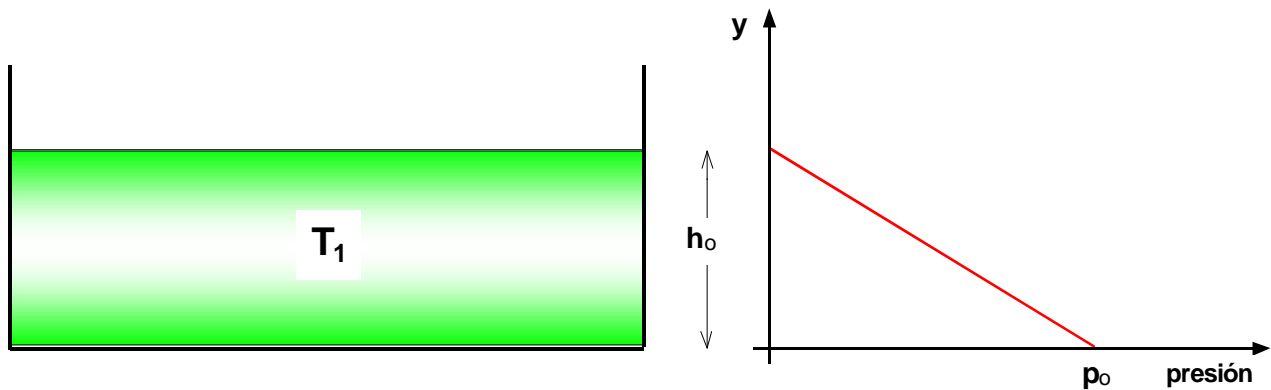


Figura 5.3.1.1

Figura 5.3.1.1 bis

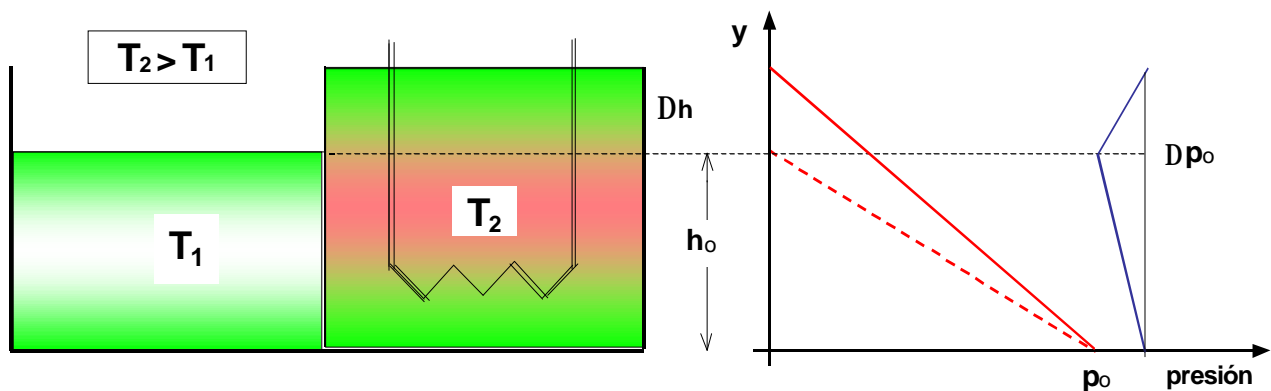


Figura 5.3.1.2

Figura 5.3.1.2 bis

contrario en la inferior, estableciéndose dos corrientes que, si los sistemas de

calefacción y refrigeración se mantienen eficaces (la derecha siempre a T_2 y la izquierda siempre a T_1), llegarán a su equilibrio dinámico en cuanto la corriente superior sea del mismo caudal que la inferior. En este equilibrio, los niveles de vidrio en ambas zonas dependerán del salto térmico entre ellas, y del caudal provocado, el cual estará especialmente condicionado por la viscosidad del vidrio.

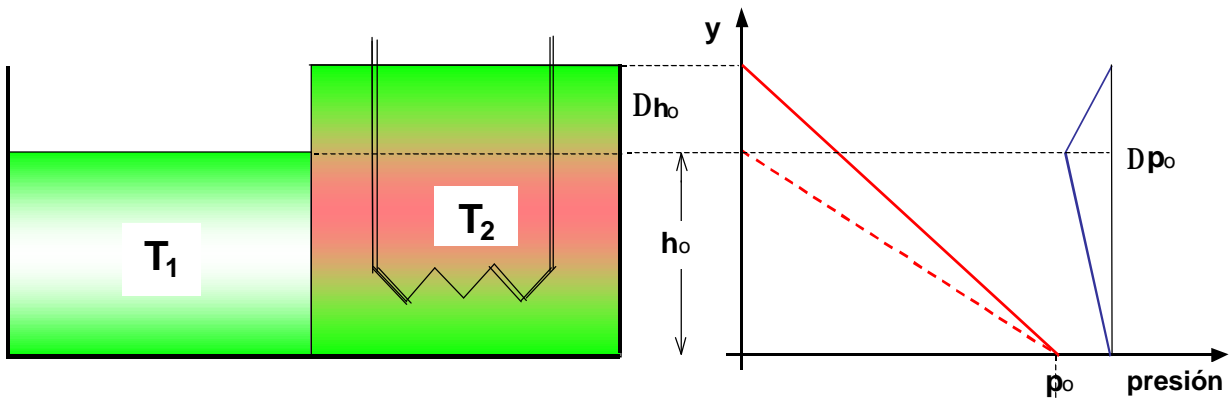


Figura 5.3.1.3

Figura 5.3.1.3

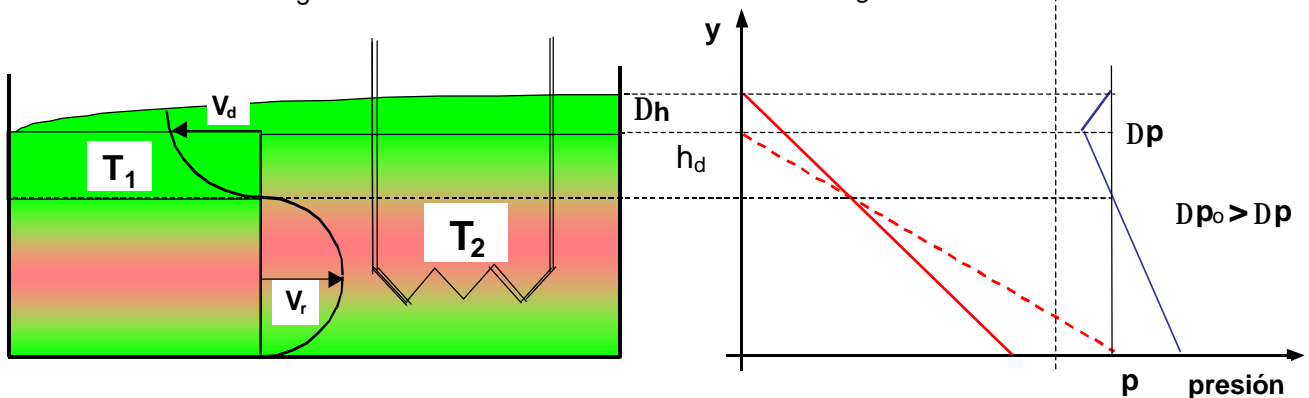


Figura 5.3.1.4

Figura 5.3.1.4 bis

La corriente superior se produce por la presión (Dp), que varía con la ordenada (y) según se dibuja en la figura 5.3.1.4bis; es decir, según una función lineal del tipo:

$$Dp(y) = Dp_0 \left(1 - \frac{y}{h_d}\right)$$

Este valor va disminuyendo, hasta anularse, a lo largo del eje OX de la cuba (ver figura 5.3.1.5). Si su variación se considera constante con respecto a x (que cómo hemos visto, es una hipótesis bastante aceptable), resultará que:

$$\left(\frac{dDp(y)}{dx}\right) = \frac{Dp_0}{2.L} \cdot \left(1 - \frac{y}{h_d}\right)$$

para todo x .

5.3.2.- El cálculo de la distribución de velocidades longitudinales. Caudal de convección (aproximación de Sokolov y Velev)

Las ecuaciones de Navier, para el caso de una distribución de temperaturas uniforme se ven reducidas a:

$$-m(y) \cdot \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) = \left(\frac{\partial Dp(y)}{\partial x}\right)$$

La integración analítica es muy complicada. En una primera aproximación, Sokolov propone una **integración simplificada**, en la que se suponga un valor de m constante e igual a un "valor equivalente" \bar{m} .

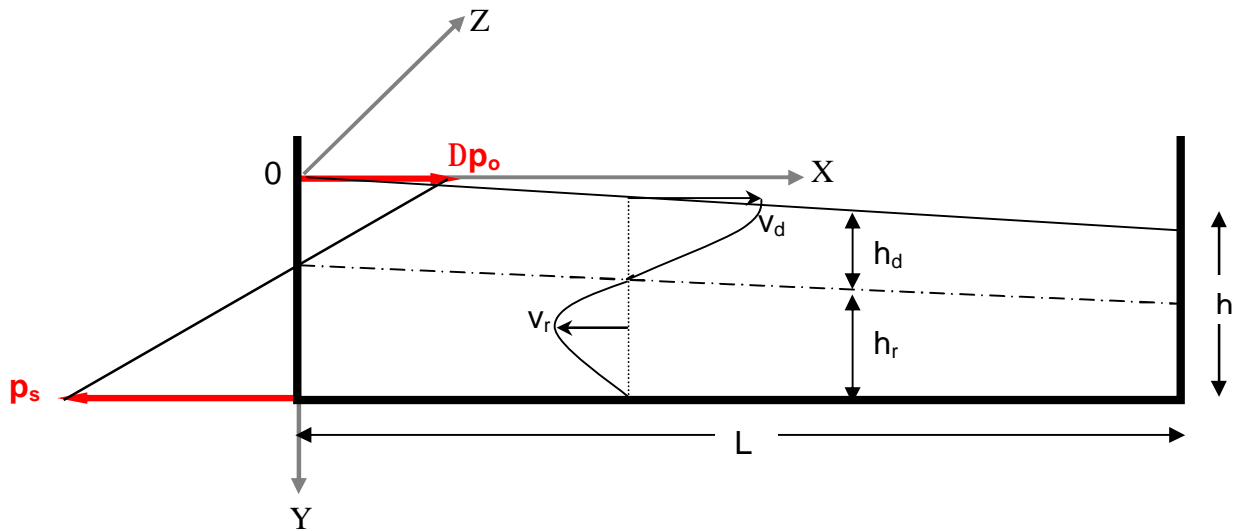


Figura 5.3.1.5

En este caso, la integración de la ecuación anterior nos conducirá a:

$$-\bar{m} \int dy \int \frac{d^2v}{dy^2} \cdot dy = \frac{Dp_0}{2.L} \left(1 - \frac{y}{h_d}\right)$$

$$-\int \bar{m} \cdot \frac{dv}{dy} \cdot dy = \frac{Dp_0}{2.L} \left(y - \frac{y^2}{2.h_d}\right) + C_1$$

Volviendo a integrar:

$$v(y) = -\frac{Dp_0}{2.\bar{m}.L} \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{6.h_d}\right) + C_1 \cdot y + C_2$$

Las constantes de integración se calculan a través de las condiciones de contorno. Estas son distintas, en función de los casos que queramos contemplar.

1º) Superficie superior libre:

- a) $y = 0$ (superficie del vidrio), $v = \text{máxima velocidad}$
- b) $y = h_d$ $v = 0$ (interfase donde cambia el sentido de la corriente)

$$a) \left(\frac{dv}{dy} \right)_{y=0} = 0$$

$$\left(\frac{dv}{dy} \right)_{y=0} = \frac{Dpo}{2.L} \left(0 - \frac{0^2}{2.h_d} \right) + C_1 = 0, \text{ de donde: } C_1 = 0$$

$$b) 0 = -\frac{Dpo}{2.\bar{m}.L} \left(\frac{h_d^2}{2} - \frac{h_d^3}{6.h_d} \right) + C_2, \text{ de donde: } C_2 = \frac{Dpo}{2.\bar{m}.L} \frac{h_d^2}{3}$$

y sustituyendo:

$$v(y) = \frac{Dpo}{12.\bar{m}.L} \left(2.h_d^2 - 3.y^2 + \frac{y^3}{h_d} \right)$$

Esta expresión nos proporciona, de acuerdo con las hipótesis simplificadoras expuestas, la distribución de velocidades en el sentido vertical. Dadas estas simplificaciones admitidas para llegar a ella, no tiene más valor que el cualitativo, del cual hablaremos más adelante.

Su integral con respecto a la superficie perpendicular al vector velocidad, nos proporciona el valor del caudal de convección directa del vidrio:

$$V_d = A \cdot \int_0^{h_d} v(y) \cdot dy = A \cdot \int_0^{h_d} \frac{Dpo}{12.\bar{m}.L} \left(2.h_d^2 - 3.y^2 + \frac{y^3}{h_d} \right) dy$$

$$V_d = A \cdot \frac{Dpo}{12.\bar{m}.L} \left(2.h_d^2 \cdot y - y^3 + \frac{y^4}{4.h_d} \right)_0^{h_d} \cdot \text{ ó } V_d = A \cdot \frac{Dpo}{12.\bar{m}.L} \left(2.h_d^2 \cdot h_d - h_d^3 + \frac{h_d^4}{4.h_d} \right)$$

$$V_d = \frac{5.A.Dpo}{48.\bar{m}.L} h_d^3$$

2º) Superficies en contacto con elementos en los que la velocidad es nula (capa intermedia, paredes rígidas, etc.):

$$a) y = 0 \quad v = 0$$

$$b) y = h_r \quad v = 0$$

Con estos límites, las constantes de integración valen: $C_2 = 0$

$$C_1 = \frac{Dpo}{2.\bar{m}.L} \frac{h_r}{3}$$

es decir que la velocidad en este caso, puede expresarse según:

$$v(y) = \frac{Dpo}{12.\bar{m}.L} \left(2.h_r \cdot y - 3.y^2 + \frac{y^3}{h_r} \right)$$

análogamente, el caudal en este caso se expresará cómo: $V_r = \frac{A.Dpo}{48.\bar{m}.L} h_r^3$

5.3.3.- Primeras observaciones

1º) Los valores de las presiones Dp

En los apartados (5.3.1) y (5.1) hemos mostrado que en las cubas de los hornos de elaboración de vidrios industriales puede considerarse, sin temor a errores importantes, que las variaciones de la presión vitroestática con la profundidad siguen leyes lineales. Como consecuencia de ello, hemos aceptado expresiones como: $Dp(y) = Dp_o (1 - \frac{y}{h_d})$, para representar la presión que mueve las diferentes capas de vidrio laminar en la cuba.

Si observamos la figura (5.3.1.5) podremos establecer que, por la semejanza de los triángulos:

$$\frac{Dp_o}{h_d} = \frac{p_s}{h_r}$$

De la figura (5.3.1.4bis) se deduce que p_s es la diferencia de presiones entre una zona y otra de la cuba simplificada. Podríamos escribir que:

$$p_s = h \cdot r_1 \cdot g - (h + Dh) \cdot r_2 \cdot g$$

siendo r_1 la densidad media de la zona caliente de la cuba, y r_2 la densidad media de la zona menos caliente ($g = 980 \text{ cm/seg}^2$, como siempre). Por la misma razón:

$Dp_o = Dh \cdot g \cdot r_s$; siendo r_s la densidad media de la capa superior del vidrio.

$$\frac{Dh \cdot g \cdot r_s}{h_r} = \frac{h \cdot r_1 \cdot g - (h + Dh) \cdot r_2 \cdot g}{h_r}$$

Esta expresión se simplifica, y queda así:

$$Dh = \frac{h \cdot (r_1 - r_2)}{h_r \cdot r_s + h_d \cdot r_2} h_d$$

Si miramos de nuevo las fórmulas del apartado (5.1), podremos concluir que:

$$h_r \cdot r_s + h_d \cdot r_2 @ (h_r + h_d) \cdot r_m = h \cdot r_m$$

con lo que:

$$Dh @ \frac{(r_1 - r_2)}{r_m} h_d$$

Así pues, $Dp_o = Dh \cdot r_s \cdot g @ (r_1 - r_2) \cdot g \cdot h_d$

Volviendo sobre la ecuación anterior: $\frac{Dp_o}{h_d} = \frac{p}{h_r}$, tenemos que $p = \frac{Dp_o}{h_d} h_r$

por tanto: $p @ (r_1 - r_2).g.h_r$

2º) Las expresiones de la velocidad y el caudal de convección

a) Corriente superior o "directa" y superficie libre

Recordemos que: $v(y) = \frac{Dp_o}{12.\bar{m}_d.L} \left(2.h_d^2 - 3.y^2 + \frac{y^3}{h_d} \right)$

$$V_d = \frac{5.A.Dp_o}{48.\bar{m}_d.L} h_d^3$$

que se transforman en: $v_d = \frac{(r_1 - r_2).g.h_d}{12.\bar{m}_d.L} \left(2.h_d^2 - 3.y^2 + \frac{y^3}{h_d} \right)$

$$V_d = \frac{5.A.(r_1 - r_2).g}{48.\bar{m}_d.L} h_d^4$$

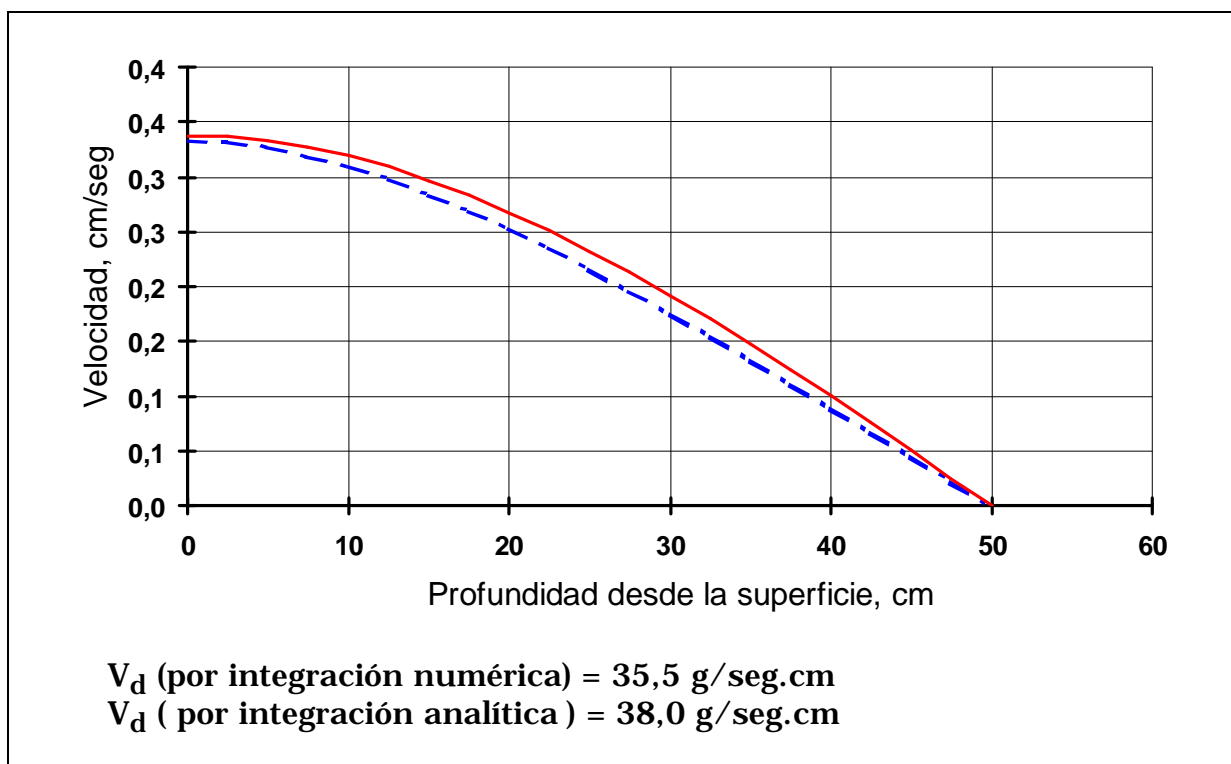


Figura 5.3.3.1

En la figura 5.3.3.1 se trazan, para un caso particular frecuente, las curvas de distribución de velocidades longitudinales calculadas por la fórmula analítica, tomando como viscosidad la correspondiente a la viscosidad media entre las de las temperaturas extremas de la corriente de vidrio, y calculadas por integración

numérica. Se adjuntan los valores de los caudales correspondientes. Las diferencias son importantes.

b) Corriente con superficies no libres

En este caso, hemos visto que: $v(y) = \frac{Dp_o}{12.\bar{m}_r.L} \left(2.h_r.y - 3.y^2 + \frac{y^3}{h_r} \right)$

$$V_r = \frac{A.Dp_o}{48.\bar{m}_r.L} h_r^3$$

Haciendo el mismo cambio que anteriormente, resultarán las expresiones siguientes:

$$v(y) = \frac{(r_1 - r_2).g.h_r}{12.\bar{m}_r.L} \left(2.h_r.y - 3.y^2 + \frac{y^3}{h_r} \right)$$

$$V_r = \frac{A.(r_1 - r_2).g}{48.\bar{m}_r.L} h_r^4$$

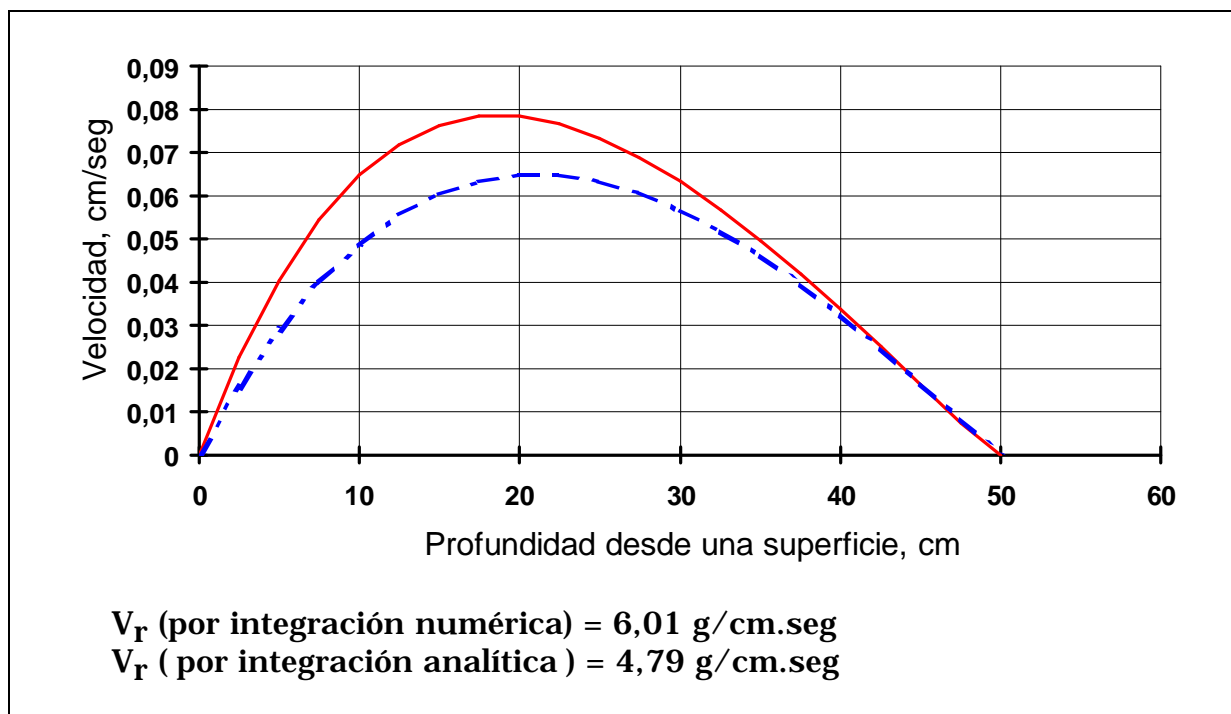


Figura 5.3.3.2

En las mismas condiciones que en las del ejemplo anterior, se obtiene el gráfico 5.3.3.2. También en este caso, las diferencias son notables.

Supongamos ahora que en una cuba la corriente directa, que se establece por la parte superior, presenta la superficie superior libre, como parece lógico en nuestros hornos. En una situación en equilibrio, la corriente másica superior tiene que ser igual a la inferior.

Por tanto, deberemos igualar V_r y V_d expresadas en $g/cm.seg.$

$$\frac{A.(r_1 - r_2).g}{48.\bar{m}_r.L} r_r.h_r^4 = \frac{5.A.(r_1 - r_2).g}{48.\bar{m}_d.L} r_d.h_d^4$$

Simplificando esta expresión, quedará:

$$\frac{h_r}{h_d} = \sqrt[4]{\frac{5.r_d.\bar{m}_r}{r_r.\bar{m}_d}}$$

que con la $h = h_r + h_d$ permite el cálculo de los espesores de cada una de las corrientes de convección.

Si, como ocurre en las zonas de la cuba cubiertas por la composición, la superficie superior de la corriente directa no se halla libre, las ecuaciones de caudal que deberíamos igualar serían:

$$\frac{A.(r_1 - r_2).g}{48.\bar{m}_r.L} h_r^4 = \frac{A.(r_1 - r_2).g}{48.\bar{m}_d.L} h_d^4$$

que simplificando nos daría:

$$\frac{h_r}{h_d} = \sqrt[4]{\frac{r_d.\bar{m}_r}{r_r.\bar{m}_d}}$$

que como antes, junto con la expresión $h = h_r + h_d$ nos permiten calcular en este caso, los valores de los espesores de las corrientes de convección.

Ahora estamos en condiciones de estimar los valores de las velocidades longitudinales de las corrientes de convección, así cómo su caudal.

5.3.4- Algunas conclusiones de orden cuantitativo

1ª) Las fórmulas que nos proporcionan en cada caso las distribuciones de velocidades longitudinales y los caudales de vidrio, basadas en una integración analítica simplificada, tomando para las propiedades del vidrio las de los valores medios de las temperaturas, pueden presentar un cierto interés cualitativo, pero suponen diferencias importantes con los valores obtenidos mediante la integración numérica, más exacta.

2ª) Si la corriente considerada es la superior y con la superficie libre, la máxima velocidad se encuentra en esa superficie, descendiendo luego hasta anularse en el plano intermedio, según una ley aproximadamente cúbica. El caudal de la corriente es proporcional a la cuarta potencia de su espesor.

3ª) En el caso anterior, puesto que necesariamente la corriente inferior no puede presentar ninguna superficie libre, podemos estimar que los espesores de las corrientes, en una cuba de las frecuentes, están en una relación de:

$$\frac{h_r}{h_d} @ \sqrt[4]{\frac{5 \cdot 2,26 \cdot 280}{2,28 \cdot 84}} = 2,016$$

es decir, $h_r @ 2,0 \cdot (h - h_r)$, y:

$$\begin{aligned} h_r &@ 1/3 \cdot h \\ h_d &@ 2/3 \cdot h \end{aligned}$$

4ª) En el caso de que la corriente superior no presente una superficie libre, el máximo de la velocidad se sitúa aproximadamente a:

$$\frac{dv(y)}{dy} = \frac{(r_1 - r_2) \cdot g \cdot h_r}{12 \cdot \bar{m}_r \cdot L} \cdot \left(2 \cdot h_r - 6 \cdot y + \frac{3 \cdot y^2}{h_r} \right) = 0; \quad 2 \cdot h_r - 6 \cdot y + \frac{3 \cdot y^2}{h_r} = 0$$

que despejando el valor de y nos da $y @ 0,423 \cdot h_r$
El valor obtenido por cálculo numérico es $y @ 0,370 \cdot h_r$

5.4.- LA MODELIZACIÓN DE LAS CORRIENTES DE CONVECCIÓN EN LA CUBA DE UN HORNO PARA ELABORACIÓN DE VIDRIO

5.4.1.- El modelo analítico

La modelización intentada de forma analítica por Skolov a principios del siglo XX contempla un modelo en 2D, en condiciones adiabáticas, con una geometría extremadamente simplificada y con viscosidades “medias” en cada uno de los “recipientes”. La misma modelización, introduciendo una sencilla función de temperatura con el espesor y , provoca ya diferencias en los resultados nada despreciables, como hemos podido ver. Las soluciones analíticas de las ecuaciones de Navier a lo sumo ayudan a calibrar cualquier otro modelo más sofisticado.

En nuestro caso, nos seguimos manteniendo en una modelización 2D, en la que vamos a intentar introducir la posibilidad de hacer variar las propiedades del vidrio en función de las coordenadas del punto en cuestión.

5.4.2.- Un modelo numérico

Supondremos que la variación de la temperatura con la ordenada y es lineal, y que su variación en el sentido x también. En la corriente convectiva principal la corriente másica superior tiene que ser igual a la inferior, y esta última debe ser constante a lo largo de toda la longitud del horno. Consecuencia inmediata de estas hipótesis es que el que hemos llamado "plano neutro" no puede ser paralelo al plano del fondo de la cuba (Figura 5.4.2.1).

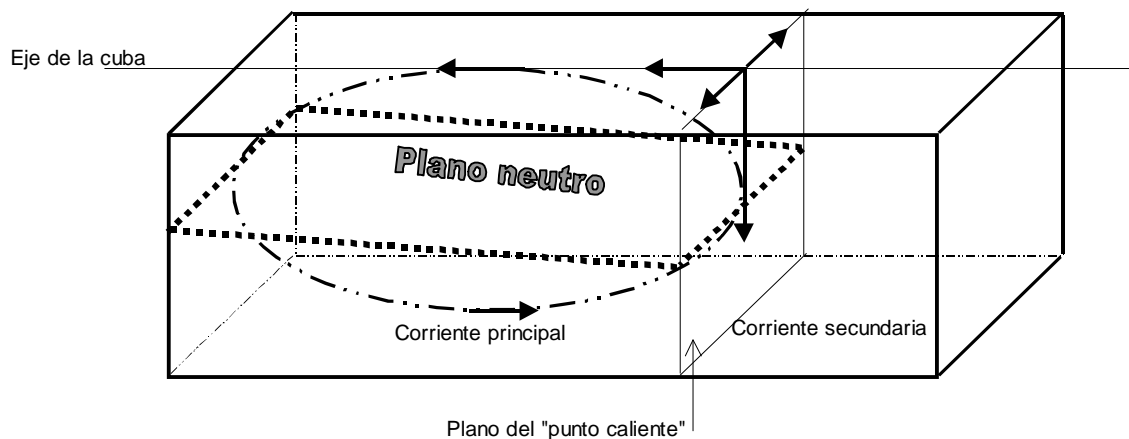


Figura 5.4.2.1

Las temperaturas en el plano del "punto caliente" son superiores a las del plano opuesto, y por lo tanto, para compensar el efecto de la viscosidad, para que se pueda cumplir la ley de la continuidad en un régimen estacionario, es preciso que la sección de paso de la corriente sea mayor en las zonas frías que en las más calientes.

Supongamos, para nuestro vidrio ejemplo, los siguientes valores:

$$\begin{aligned}
 \text{Plano caliente} & \quad T(L,y) = 1.386 - 0,86 \cdot y \\
 \text{Plano frío} & \quad T_f(0,y) = 1.355 - 0,86 \cdot y \\
 & \quad L = 10 \text{ m}
 \end{aligned}$$

El resultado es:

$$\begin{aligned}
 \text{Ordenada del plano neutro en el punto caliente:} & \quad 100,0 \text{ cm} \\
 \text{Ordenada del plano neutro en el punto frío:} & \quad 110,3 \text{ cm} \\
 \text{Caudal de vidrio:} & \quad 20,16 \text{ g/seg.cm de anchura}
 \end{aligned}$$

Esta forma de la superficie que llamamos neutra, es contraria a la que necesita el flujo de la corriente superior, la cual además se ve entorpecida por el deslizarse y disolverse de las materias vitrificables que flotan sobre ella.

Por otra parte, un modelo 2D no tiene en cuenta que al no ser la cuba adiabática, sus paredes laterales son zonas frías hacia las cuales tienden unas

corrientes que engrosan la corriente principal de retorno, en detrimento de la superior.

A todo esto hay que sumar el efecto de los extremos de la corriente, cuya forma rompe completamente con las fórmulas hasta ahora usadas.

Esto nos conduce a la conclusión de que la simulación de las corrientes de convección, es el problema más complicado con el que se choca, al querer establecer un modelo de comportamiento de un horno de elaboración de vidrio.

Tomemos ahora en el ejemplo anterior los valores medios:

$$\text{Plano medio} \quad T(\frac{1}{2}L, y) = 1.370,5 - 0,86.y \\ L = 10 \text{ m}$$

y calculemos el caudal correspondiente para una situación del plano neutro intermedia: $20,18 \text{ g/seg.cm}$, cuya comparación con la solución anterior, muestra una interesante similitud.

5.4.3.- El modelo retenido

«Todo modelo es bueno, a condición de que esté bien calibrado y sólo se utilice dentro de aquellos intervalos para los que fue creado. Sobre todo, si no se dispone de otro mejor a mano»

Esta discutible afirmación es de este humilde autor. Pero es la hipótesis fundamental que nos permite continuar. Veremos cómo a pesar de sus limitaciones nos permite extraer conclusiones de interés.

Este modelo parte de las hipótesis siguientes:

1ª) La “presión motriz” que mueve las capas de vidrio se calcula por:

$$Dp_o = Dh.r_s.g @ (r_1 - r_2).g.h_d$$

manteniendo la simbología anterior. Sabemos, por lo ya comentado al inicio de este Capítulo que $(r_1 - r_2) = \frac{T_1 - T_2}{d}$ siendo d una constante propia de cada vidrio, (muy próxima a $6.000^\circ\text{C.cm}^3/\text{g}$ para la mayor parte de los vidrios industriales).

2ª) Las viscosidades medias de las corrientes se calculan a partir del valor de sus temperaturas medias respectivas, afectadas de unos coeficientes correctores establecidos previamente a través del método descrito en §5.3.3 (comparación de integración analítica vs numérica). Con estos valores se calcula la situación del “plano medio” de la cuba de vidrio. Se cumple que la posición del “plano neutro” se encuentra según:

$$\frac{h_r}{h_d} = \sqrt[4]{\frac{r_d \cdot \bar{m}_r}{r_r \cdot \bar{m}_d}}$$

$$h = h_r + h_d$$

- 3ª) El caudal de la corriente de retorno o inferior se determina por la integración numérica de la ecuación:

$$-m(y) \cdot \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) = \left(\frac{\partial p(y)}{\partial x} \right)$$

con la distribución de temperaturas correspondiente al que hemos llamado "plano medio"

- 4ª) El efecto de las corrientes laterales, así como de otros fenómenos no considerados en el modelo se realiza mediante la introducción, en el resultado final del cálculo de caudal, de un coeficiente correctivo, al que llamamos "de agitación" (A_g), cuyo valor se utiliza como uno de los coeficientes de calibrado del modelo. Ver Capítulo IX.